माध्यमिक पाठ्यक्रम

211 - गणित

प्रायोगिक पुस्तिका

पाठ्यक्रम समन्वयक
नीरज प्रताप सिंह

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
(मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार की एक स्वायत्त संस्था)
ए-24/25, शैक्षणिक क्षेत्र, एन.एच-24, सैक्टर-62, नोएडा-201309 (उ०प्र०)
Website: www.nios.ac.in, Toll Free No. 18001809393

दिसंबर 2011 (प्रतियां)

सचिव, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान, ए-24/25, शैक्षणिक क्षेत्र, एन.एच.-24, सैक्टर-62, नोएडा-201309 द्वारा प्रकाशित एवं .... द्वारा मुद्रित।

सलाहकार समिति

डा. एस.एस. जेना
अध्यक्ष
एनआईओएस

डा. कुलदीप अग्रवाल
निदेशक (शैक्षिक)
एनआईओएस

श्रीमती गोपा बिश्वास
सं. निदेशक (शैक्षिक)
एनआईओएस

पाठ्यक्रम समिति

अध्यक्ष
प्रो. मोहन लाल
सचिव डीएवी महाविद्यालय प्रबंधन समिति
ई–182, न्यू राजेन्द्र नगर
नई दिल्ली, पिन–110060

श्री जी.डी. ढल
सेवानिवृत्त (रीडर), एन.सी.ई.आर.टी.
के–171, एलआईसी कालोनी, पश्चिम विहार
नई दिल्ली, पिन–110087

श्री जे.सी. निझावन
सेवानिवृत्त (उपप्राचार्य),
सर्वोदय विद्यालय, सी–ब्लाक
सरस्वती विहार, नई दिल्ली, पिन–110087

प्रो. रामअवतार
सेवानिवृत्त (प्रोफेसर), एन.सी.ई.आर.टी.
833, सेक्टर–7, अरबन स्टेट
गुड़गांव, हरियाणा, पिन–122001

श्री पी.के. गर्ग
सेवानिवृत्त (प्राचार्य), रामजस विद्यालय
169, पुन्डरीक विहार, सरस्वती विहार
नई दिल्ली, पिन–110034

श्री महेन्द्र शंकर
सेवानिवृत्त (रीडर), एन.सी.ई.आर.टी.
डीपी 203, मौर्या एन्क्लेव, पीतमपुरा
नई दिल्ली, पिन–110088

श्री ईश्वर चन्द्र
सेवानिवृत्त (रीडर), एन.सी.ई.आर.टी.
म.नं. WZ 1427 डी, नांगल राया
नई दिल्ली, पिन–110056

श्री शुभेन्दु शेखर दास
सहा. निदेशक (शैक्षिक)
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
A-24/25, शैक्षणिक क्षेत्र, सेक्टर–62
नोएडा, पिन–201309

श्री नीरज प्रताप सिंह
वरिष्ठ कार्यकारी अधिकारी (गणित)
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
A-24/25, शैक्षणिक क्षेत्र, सेक्टर–62
नोएडा, पिन–201309

पाठ लेखक

श्री जी.डी. ढल
सेवानिवृत्त (रीडर), एन.सी.ई.आर.टी.
के–171, एलआईसी कालोनी, पश्चिम विहार
नई दिल्ली, पिन–110087

श्री जे.सी. निझावन
सेवानिवृत्त (उपप्राचार्य),
सर्वोदय विद्यालय, सी–ब्लाक
सरस्वती विहार, नई दिल्ली, पिन–110087

संपादक

डा आई. के. बन्सल
सेवानिवृत्त (प्रोफेसर), एनसीईआरटी
129, पाकेट सी–13, सेक्टर–3, रोहिनी
नई दिल्ली, पिन–110085

श्री पी.के. गर्ग
सेवानिवृत्त (प्राचार्य), रामजस विद्यालय
169, पुन्डरीक विहार, सरस्वती विहार
नई दिल्ली, पिन–110034

डा. के.के. वशिष्ठ
वसेवानिवृत्त (प्रोफेसर), एनसीईआरटी
15/107, डयूप्लेक्स, वसुंधरा, गाजियाबाद
उत्तर प्रदेश, पिन–201012

श्री नीरज प्रताप सिंह
वरिष्ठ कार्यकारी अधिकारी (गणित)
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
A-24/25, शैक्षणिक क्षेत्र, सेक्टर–62
नोएडा, पिन–201309

डा राजपाल सिंह
व्याख्याता – गणित
राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय
218, मैत्री अपार्टमैंट, आई पी एक्सटेंशन
पटपड़गंज, नई दिल्ली, पिन–110092

अनुवादक

श्री जी.डी. ढल
सेवानिवृत्त (रीडर), एन.सी.ई.आर.टी.
के–171, एलआईसी कालोनी, पश्चिम विहार
नई दिल्ली, पिन–110087

श्री जे.सी. निझावन
सेवानिवृत्त (उपप्राचार्य),
सर्वोदय विद्यालय, सी–ब्लाक
सरस्वती विहार, नई दिल्ली, पिन–110087

रेखा चित्रकार

श्री महेश शर्मा
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
नोएडा, पिन–201309

श्री सुन्दर सिंह रावत
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
नोएडा, पिन–201309

Laser Typesetted by Shivam Graphics

अध्यक्ष का संदेश

प्रिय शिक्षार्थी,

क्योंकि व्यापक रूप से समाज की तथा कुछ समूहों की विशेष रूप से, समय के साथ आवश्यकताएँ बदलती रहती हैं, इन आकांक्षाओं को पूरा करने के तरीके भी बदलने पड़ते हैं। शिक्षा परिवर्तन का एक साधन है। सही समय पर, सही प्रकार की शिक्षा, समाज के दृष्टिकोण में धनात्मक परिवर्तन ला सकती है तथा यह कठिन स्थितियों तथा नई चुनौतियों का मुकाबला करने की हिम्मत देती है। ऐसा, शिक्षा के पाठ्यक्रम को समय समय पर आवश्यकता अनुसार बदल कर किया जा सकता है। एक निश्चित पाठ्यक्रम से कोई उद्देश्य प्राप्त नहीं होता क्योंकि यह समय की मांग तथा समाज और व्यक्ति की आकांक्षाओं को पूरा करने में सक्षम नही होता।

केवल इस उद्देश्य से ही देश के हर कोने से शिक्षाविद् नियमित अन्तराल पर इकट्ठे होकर, आवश्यक परिवर्तनों पर चर्चा करते रहते हैं। इन चर्चाओं के परिणामस्वरूप, राष्ट्रीय पाठ्यक्रम ढांचा (**NCF 2005**) तैयार हुआ जो स्पष्ट रूप से व्याख्या करता है कि विभिन्न स्तरों – प्राथमिक से उच्चतर माध्यमिक तक, किस प्रकार की शिक्षा वांछनीय है।

इस शिक्षा ढाँचे, राष्ट्र तथा समाज की आवश्यकताओ का ध्यान रखते हुए, हमने सभी विषयों में माध्यमिक स्तर पर पाठ्यक्रम को वर्तमान बनाने तथा समाज की आवश्यकतानुसार बनाकर बदलने का प्रयास किया है। लेखन सामग्री का बनाना राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान के सभी प्रोग्रामों, जो मुक्त तथा दूर शिक्षा के माध्यम से उपलब्ध करवाई जाती हैं, का एक अभिन्न अंग है। हमने इस बात का विशेष ध्यान रखा है कि नयी बनी अध्ययन सामग्री उपयोगकर्ता के योग्य तथा आकर्षक हो।

मैं उन सब प्रतिष्ठित व्यक्तियों को, जिन्होंने इस सामग्री को आकर्षक तथा आपकी आवश्यकतानुसार बनाया, धन्यवाद देता हूँ। मेरा अपना मत है कि आप इस सामग्री को उपयोगी तथा आकर्षक पायेंगे।

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान की ओर से मैं आपके उज्जवल तथा सफल भविष्य की कामना करता हूँ।

(डॉ. सितांशु शेखर जेना)

अध्यक्ष

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान

निदेशक की कलम से

प्रिय शिक्षार्थी,

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान का शिक्षण विभाग यदा–कदा नए पाठ्यक्रम लाने का प्रयास करता है, जिनकी आपको आवश्यकता हो। हाल ही में संस्थान ने माध्यमिक स्तर पर सभी विषयों के पाठ्यक्रम को सुधारने का बीड़ा उठाया। आपको देश के दूसरे बोर्डों के समतुल्य पाठ्यक्रम देने के लिए केन्द्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड देश के अन्य राज्य के बोर्डों के पाठ्यक्रम को भी देखा गया। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान परिषद द्वारा बनाए गए राष्ट्रीय शैक्षिक पाठ्यक्रम ढाँचा को हमने आधार माना। इनका विस्तारिक तुलनात्मक अध्ययन करने के पश्चात, हमने अपने बनाए पाठ्यक्रम को अधिक क्रियात्मक, लाभदायक तथा जीवन से जुड़ा पाया। हमने देश के प्रसिद्ध शिक्षाविदों को बुलाकर उनके तत्वावधान में पाठ्यक्रम का पुनःनिरीक्षण किया तथा इसे नया बनाया।

इसके साथ–साथ हमें उस शिक्षण सामग्री, पर भी ध्यान दिया जो आपके पास आनी है। हमने पुरातन निष्क्रिय सूचनाओं को हटा कर नई तथा लाभदायक सूचनाएं जोड़ दी है तथा सामग्री को आपके लिए आकर्षक तथा रोचक बनाया गया है।

मैं आशा करता हूँ कि आपको नई सामग्री रोचक तथा आकर्षक लगेगी। इस सामग्री को और अधिक लाभप्रद बनाने के लिए सुझावों का स्वागत है।

मैं आप सब के सुखद तथा उज्जवल भविष्य की कामना करता हूँ।

(डॉ. कुलदीप अग्रवाल)
निदेशक
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान

आपसे दो बातें

प्रिय शिक्षार्थी,

आप राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान द्वारा दी गई पुस्तक 1 तथा पुस्तक 2 को पढ़ने में आनन्द प्राप्त कर रहें होंगे। गणित में कुछ संकल्पनाएँ प्रकृति में अमूर्त होती है, तथा सीखने मे यह आसान हो जाती है जब इन्हें गणित प्रयोगशाला मे क्रियाकलाप द्वारा सीखा जाए। गणितीय क्रियाकलाप सहायक द्वारा, अन्वेषण, सीखने तथा विषय में रूचि बढ़ाने तथा विषय की ओर सकारात्मक मानसिकता का विकास करने के लिए किया जाता है।

इस दृष्टिकोण को ध्यान में रखते हुए राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान दृवारा गणितीय प्रायोगिक पुस्तिका बनाई गई है, जो कि आपके हाथों में है। यह गणित की दो विषय पुस्तको के अतिरिक्त है।

प्रारम्भ मे, इस प्रयोगिक पुस्तिका में, भूमिका के अन्तर्गत कुछ पृष्ठो में गणित में प्रयोगात्मक क्रियाकलापों के महत्व को दर्शाया गया है।

इस पुस्तिका में 30 विधि बताई गई है कि, क्रियाकलापों को दिया गया है। प्रत्येक क्रियाकलाप में विस्तार से कार्य करने सम्बन्धी निर्देश है तथा कैसे अवलोकन द्वारा निष्कर्ष पर पहुचना है।

यद्यपि पुस्तिका मे अवलोकनों को सारणीबद्व करने की सुविधा है फिर भी आपको एक रिकार्ड बुक रखनी होगी, क्योंकि आपको इसके आधार पर प्रायोगिक परीक्षा मे अंक दिये जाएगें।

किसी सन्देह तथा क्रियाकलाप करने में आई समस्या के लिए हमे लिखने में संकोच न करें।

हम आशा करते है कि आप इन क्रियाकलापों को करने का आनन्द उठायेंगे।

आप की सफलता की कामना करते हुए,

आपका

(नीरज प्रताप सिंह)
वरिष्ठ कार्यकारी अधिकारी (गणित)

भूमिका

सामान्यतः यह कहा जाता है कि गणित केवल आभ्यास करके ही सीखा जाता है। सकंल्पानाए, जिनकी उपपत्ति/सत्यापन प्रयोगात्मक अथवा क्रियाकलापों की विधियों, द्वारा किया जाता हैं, पाठकों को अधिक अच्छी प्रकार से समझ आता हैं तथा उनके मस्तिष्क में अधिक समय तक स्थापित रहता है। जीन पियाजे (Jean Piaget) जो एक मनोवैज्ञानिक थे, ने संकल्पनाओं के निर्माण पर लिखे शोधपत्र में यह कहा था कि वह अमूर्त संकल्पनाएँ जो मूर्त अवस्था तक लाई जा सकती है, बच्चों द्वारा अच्छी प्रकार से समझी जा सकती हैं तथा अधिक समय तक स्थापित रहती हैं। उदाहरण के लिए संख्या दो की अमुर्त संकलपना, यदि दो सेबों, दो संतरों अथवा कोई अन्य दो समरूप वस्तुओं को दिखाकर समझाई जाती हैं, जिन्हे शिक्षार्थी छूकर देख सकता है, तो वह अधिक अच्छी प्रकार से समझ सकता है।

मानव मस्तिष्क केवल सीमित सूचानाएं (सकल्पनाएं) संचित रख सकता है। वह सूचनाएं (सकल्पनाएं) जो बार–बार स्मरण तथा अभ्यास से आती है, बच्चों के मस्तिष्क में स्थाई रूप से संचित हो जाती हैं, जो संकल्पनाओं को समझने में सहायक होती है। वह क्रियाकलाप जो बार–बार किये जाते हैं, संकल्पनाओं को समझाने में सहायक होते हैं।

गणितीय प्रयोगशाला वह स्थान है जहाँ शिक्षार्थी कठिन गणितीय संकल्पनाओं का अन्वेषण करता हैं। गणितीय तथ्यों, सूत्रों तथा परिमेयों/परिणामों का सत्यापन कई प्रकार के क्रियाकलापों तथा संबधित परियोजनाओं, जिनमे पर्यावरण में मिलने वाली सस्ती वस्तुओं का प्रयोग किया जाता है, से किया जाता है। गणितीय प्रयोगशाला द्वारा गणितीय ज्ञान, दक्षता तथा विषय के प्रति सकारात्मक मानसिकता का निमार्ण होता है तथा सर्वोपरि अपने हाथ से करने का बल मिलता है।

यह वह स्थान है जहाँ शिक्षार्थी मूर्त वस्तुओं के प्रयोग द्वारा संकल्पनाओं को सीख सकता है तथा गणितीय तथ्यों, सूत्रों तथा गुणधर्मों का, प्रतिरूपों, मापन तथा अन्य कार्यकलापो के प्रयोग से सत्यापन कर सकता है। यहाँ शिक्षार्थी मूर्त सामग्री के प्रयोग से कल्पना के अनुसार प्रतिरूप बनाता है तथा तथ्यों/सूत्रों का सत्यापन करता है।

गणितीय प्रयोगशाला में कम से कम 30 शिक्षार्थियों के लिए क्रार्यकलापों/प्रयोगों को एक समय पर करने के लिए पर्याप्त स्थान होना चाहिए

गणितीय प्रयोगशाला की रूपरेखा तथा व्यवस्था

आवश्यक सामग्री: विभिन्न रंगों की कागज की शीटें, ग्लेज्ड़ पेपर, फुटा, लकड़ी के बोर्ड, कीलें, धागे, थर्मोकोल के टुकड़े, गत्ते, वर्गाकार तथा त्रिभुजाकार, जालीदार कागज, पिन तथा क्लिप, लकड़ी तथा कागज की पट्टियां, पेपर कटर, कैंची, गोंद/फेवीकोल, स्कैचपेन, ज्योमैट्री बाक्स (बड़ा–लकडी का) ग्राफ पेपर (इंच/सेमी. दोनों)ए विभिन्न रंगों की पेंसिलें, कलरबाक्स, मूठे, ट्रेसिंग पेपर।

मानवसंसाधन: यह अपेक्षित है कि (गणित पृष्ठभूमि वाला) एक प्रयोगशाला सहायक हो जो प्रयोगशाला का संचालक हो। उससे यह अपेक्षा है कि उसे विभिन्न उपकरणों के प्रयोग मे दक्षता हो, जिनकी कार्यकलापों मे आवश्यकता है। यदि कुछ उपकरण ठीक न हो तो वह उन्हे सुधार सके तथा आने वाले दिनों में कार्यकलापों को करने के लिए तैयार रख सके।

ऐच्छिक समय: गणित शिक्षण की कुल पाठ्यचर्या के लिए निर्धारित समय का 15% से 20% गणितीय प्रयोगशाला के लिए होना चाहिए।

मूल्यांकन की परियोजना: 15 अंक

परीक्षा में अंको का वितरण निम्न प्रकार से किया जाए:

क्रियाकलाप	अंक
किए गए क्रियाकलाप का मूल्यांकन/तैयार किए गए क्रियाकलापों का रिकार्ड	10
मौखिक परीक्षा	5
कुल	**15**

i) प्रस्तावित प्रयोगात्मक परीक्षा, लिखित परीक्षा से कम से कम 15 दिन पहले करने का सुझाव दिया जाता है।

ii) प्रत्येक विद्यार्थी को दो क्रियाकलाप दिए जाएं, जिनमें से उसे एक चुनकर वही करना है। (यदि विद्यार्थी इन दिए गए कार्यकलापों को करने मे असमर्थ हो, तो उसे अपनी पसंद का एक क्रियाकलाप करने की अनुमति दी जाए)

iii) मौखिक परीक्षा, परीक्षाकेंद्र पर उसके द्वारा किए गए क्रियाकलाप/प्रोजेक्ट से संबधित प्रश्न पूछ कर की जा सकती है।

विषय वस्तु

टिप्पणी

क्रियाकलाप 1

शीर्षकः सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ का सत्यापन करना।

अपेक्षित पूर्वज्ञानः एक वर्ग तथा एक आयत का क्षेत्रफल।

उद्देश्यः इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात आप सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ का सत्यापन तथा निरूपण करने के योग्य हो जाएगें।

आवश्यक उपकरणः

(i) कार्डबोर्ड (गत्ता)

(ii) सफेद चार्ट पेपर

(iii) दो विभिन्न रंगों के ग्लेज्ड़ पेपर, जैसे लाल तथा हरा

(iv) कैंची

(v) गोंद

(vi) रंगीन बाल पैन

(vii) पेंसिल तथा ज्यामितीय उपकरण।

टिप्पणी

क्रियाकलाप के लिए तैयारीः

(i) सफेद चार्ट पेपर पर, वर्ग ABCD खींचिए जिसकी भुजा (a+b) इकाई है (माना a= 7 सेमी, b=4सेमी) इसे काटकर कार्डबोर्ड पर चिपकाइए।

(ii) लाल रंग के कागज से $a \times b$ (7 सेमी$\times$4 सेमी) विमाओं की दो आयतें तथा हरे कागज से भुजा b (4 सेमी) का एक वर्ग काटिए।

(iii) इन कटे हुए टुकड़ों को वर्ग ABCD में दिखाए गए चित्र के अनुसार चिपकाइए तथा इनके नाम आयत EFGD, वर्ग FHCG तथा आयत KBHF रखिए।

निरूपण तथा प्रयोग

आकृति में, वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = $(AB)^2 = (a+b)^2$ वर्ग इकाई

वर्ग AKFE का क्षेत्रफल = $(AK)^2 = a^2$ वर्ग इकाई

आयत KBHF का क्षेत्रफल = $(KF \times FH) = a \times b = ab$ वर्ग इकाई

वर्ग FHCG का क्षेत्रफल = $(HC)^2 = b^2$ वर्ग इकाई

आयत EFGD का क्षेत्रफल = $ED \times GD = a \times b = ab$ वर्ग इकाई

आकृति से हम देख सकते हैं किः

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = वर्ग AKFE का क्षेत्रफल + आयत KBHF का क्षेत्रफल + वर्ग FHCG का क्षेत्रफल + आयत EFGD का क्षेत्रफल।

अर्थात $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab$

$= a^2 + 2ab + b^2$

निष्कर्षः

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

टिप्पणी

क्रियाकलाप 2

शीर्षक: सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का सत्यापन करना।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: एक वर्ग तथा एक आयत का क्षेत्रफल।

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी सर्वसमिका $(a–b)^2 = a^2+2ab+b^2$ के सत्यापन तथा निरूपण करने के योग्य हो जाएगा।

आवश्यक उपकरण:

(i) कार्डबोर्ड (गत्ता)

(ii) सफेद चार्ट पेपर

(iii) भिन्न रंगों के ग्लेज्ड़ पेपर, जैसे लाल, हरा तथा पीला।

(iv) कैंची

(v) गोंद

(vi) रंगीन बाल पैन

(vii) पेंसिल तथा ज्यामितीय उपकरण।

टिप्पणी

क्रियाकलाप के लिए तैयारीः

(i) सफेद चार्ट पेपर पर, भुजा a [माना a= 10सेमी] का एक वर्ग खींचिए। इसे काट कर कार्डबोर्ड पर चिपकाइए।

(ii) लाल रंग के कागज से $a \times b$ (माना a= 10 सेमी, b=4 सेमी) विमाओं की एक आयत काटिए। हरे कागज से $(a-b)\times b$ (यहाँ a – b = 6 सेमी तथा b=4 सेमी) विमाओं का एक आयत काटिए तथा पीले कागज़ से भुजा b (b=4 सेमी) का एक वर्ग काटिए।

(iii) इन कटे हुए टुकड़ों को वर्ग ABCD पर, आकृति में दिखाए अनुसार चिपकाइए तथा इनके नाम आयत EBCF, आयत GHFD तथा वर्ग KGDL रखिए।

निरूपण तथा प्रयोग

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = $(BC)^2 = a^2$ वर्गइकाई

वर्ग AEHG का क्षेत्रफल = $(AE)^2 = (a-b)^2$ वर्गइकाई

आयत EBCF का क्षेत्रफल = $(BC \times EB)$= ab वर्गइकाई

आयत GHED का क्षेत्रफल = $(GH \times HF)=(a-b)b$ वर्गइकाई

वर्ग KGDL का क्षेत्रफल = $(KL)^2=b^2$ वर्गइकाई

आयत KHFL का क्षेत्रफल = $(KH \times HF)$= ab वर्गइकाई

आकृति से हम देख सकते हैं किः

वर्ग AEHG का क्षेत्रफल = वर्ग ABCD का क्षेत्रफल + वर्ग KGDL का क्षेत्रफल + आयत EBCF का क्षेत्रफल – आयत KHFL का क्षेत्रफल।

अर्थात $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - ab - ab$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

निष्कर्षः

$$(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$$

टिप्पणी

क्रियाकलाप 3

शीर्षक: सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ का सत्यापन करना।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: चतुर्भुजों के क्षेत्रफल।

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ के सत्यापन तथा निरूपण करने के योग्य हो जाएगा।

आवश्यक उपकरण:

(i) कार्डबोर्ड (गत्ता)

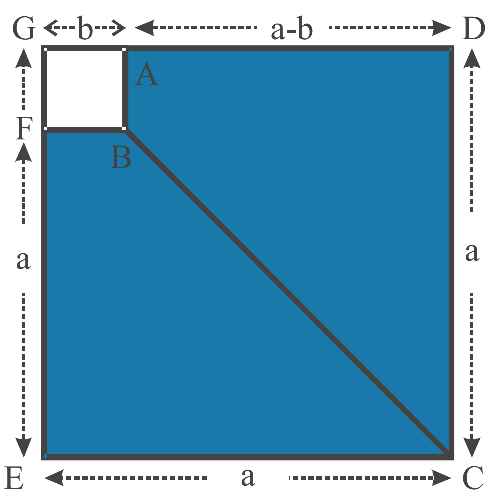
(ii) सफेद चार्ट पेपर

(iii) भिन्न रंगों के ग्लेज्ड़ पेपर।

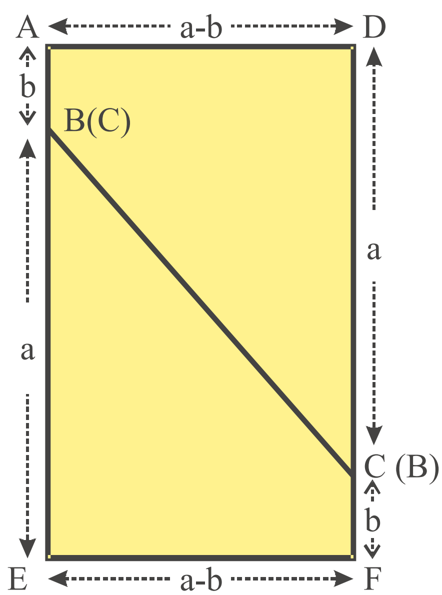
(iv) कैंची

(v) गोंद

(vi) स्कैच पेन



आकृति (i)



आकृति (ii)

टिप्पणी

क्रियाकलाप के लिए तैयारीः

(i) एक कार्डबोर्ड शीट लीजिए।

(ii) इस पर नीले कागज पर बना एक वर्ग (जिसकी भुजा a हो) चिपकाइए। इस वर्ग का क्षेत्रफल a^2 है।

(iii) पीले कागज से एक अन्य वर्ग, जिसकी भुजा $b(b<a)$ बनाइए जिसका क्षेत्रफल b^2 है।

(iv) इस छोटे वर्ग (भुजा b) को बड़े वर्ग की एक भुजा के साथ चिपकाइए (जैसा कि आकृति (i) में दिखाया गया है।)

(v) शेष भाग ADCEFB को काटिए तथा फिर इसे BC की ओर काटिए तथा आकृति (ii) में दिखाए अनुसार मिलाइए।

निरूपण तथा प्रयोग

क्षेत्रफल ADCEFB का क्षेत्रफल (आकृति (i))$=a^2-b^2$

आकृति (ii) में आयत की चौड़ाई $(a+b)$ तथा लंबाई $(a-b)$ है।

इसका क्षेत्रफल $=(a+b)(a-b)$

क्योंकि क्षेत्र ADCEFB आकृति (ii) में रूपांतरित किया गया है

अर्थात $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

निष्कर्षः

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

टिप्पणी

क्रियाकलाप 4

शीर्षक: सर्वसमिका $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ का सत्यापन करना।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: (i) घनों तथा घनाभों के शीर्षो, किनारों तथा फलकों का ज्ञान

(ii) एक घन तथा एक घनाभ का आयतन।

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी सर्वसमिका $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ के सत्यापन तथा निरूपण करने के योग्य हो जाएगा।

आवश्यक उपकरण:

(i) एक्रिलिक शीट

(ii) लकड़ी का बोर्ड

(iii) स्केच पेन

(iv) ग्लेज्ड पेपर

(v) फेविकोल

(vi) कैंची

(vii) ज्योमैट्री बाक्स

क्रियाकलाप के लिए तैयारी

$a = 3$ सेमी (माना) तथा $b = 1$ सेमी लें, जिससे $a + b = 4$ सेमी हो जाए।

(i) 3सेमी भुजा का एक घन, लकड़ी के बोर्ड से बनाएँ।

(ii) लकड़ी के बोर्ड से 1 सेमी भुजा का एक अन्य बोर्ड बनाएँ।

(iii) लकड़ी के बोर्ड से 3सेमी $\times$3सेमी $\times$1सेमी विमाओं के तीन घनाभ तथा 3सेमी $\times$1सेमी $\times$1सेमी विमाओं के तीन घनाभ बनांए।

(iv) एक्रिलिक शीट के प्रयोग से, 4 सेमी भुजा का एक घन बनाएँ।

निरूपण तथा प्रयोग

(i) 4 सेमी भुजा वाला घन $(a+b)^3$ को निरूपित करता है (आकृति 5)

(ii) 3 सेमी भुजा का घन a^3 को निरूपित करता है (आकृति 1)

(iii) 1 सेमी भुजा का घन b^3 को निरूपित करता है (आकृति 4)

(iv) 3 सेमी $\times$3सेमी $\times$1सेमी का घनाभ a^2b को निरूपित करता है (आकृति 2)

इसलिए ऐसे तीन घनाभ $= 3a^2b$

(v) इसी प्रकार 3 सेमी $\times$1 सेमी $\times$1 सेमी का घनाभ $= ab^2$ (आकृति 3)

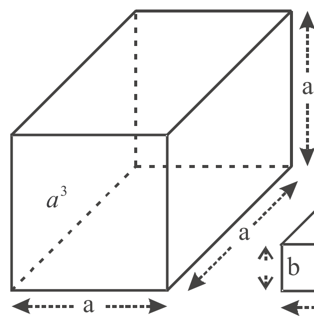
इसलिए ऐसे तीन घनाभ $= 3\,ab^2$

इन सभी घनों और घनाओं को एक्रिलिक के घन में इस प्रकार रखें कि यह पूरी तरह भर जाए, यह दर्शाते हुए कि $(a+b)^3$ आयतन का घन

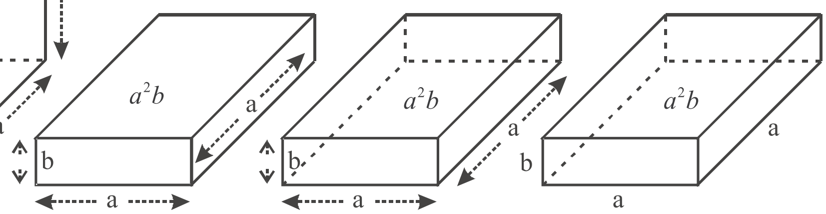
$a^3, b^3, 3a^2b, 3ab^2$ आयतनों के घनों तथा घनाओं के योगफल के बराबर है।

टिप्पणी

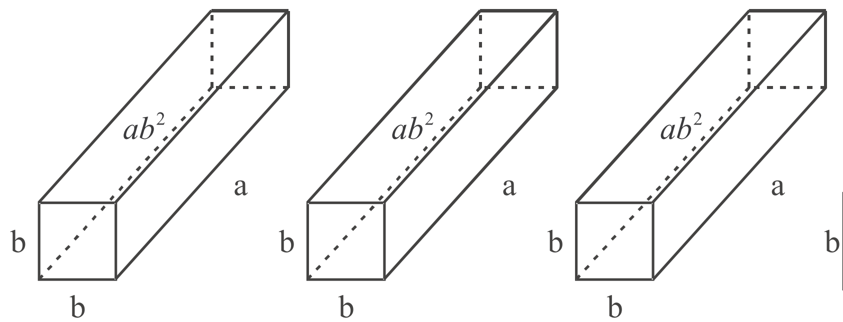
निष्कर्ष: $(a + b)^3 = a^3 + 3\ a^2b + 3\ ab^2 + b^3$

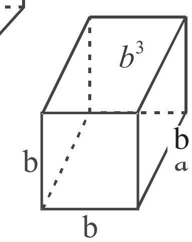


आकृति (i)



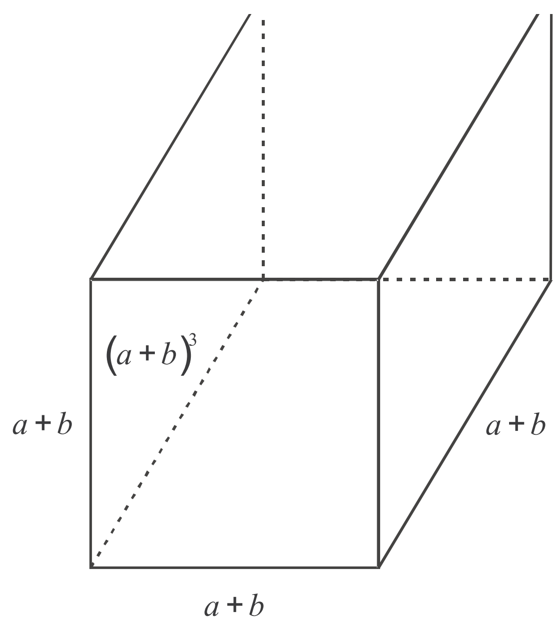
आकृति (ii)





आकृति (iii)

आकृति (iv)



आकृति (v)

क्रियाकलाप 5

शीर्षक: भाग की विधि से दो दी गई संख्याओं का म.स. (HCF) ज्ञात करना।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: (i) संख्याओं के गुणनखण्ड

(ii) संख्याओं को भाग करना।

उद्देश्य: (i) इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात, शिक्षार्थी किन्ही दो संख्याओं का म.स. (HCF) ज्ञात करने के योग्य हो जाएगा।

(ii) वह उस बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कर लेगा जिससे दो संख्याओं को विभाजित किया जा सके।

आवश्यक सामग्री:

(i) कार्ड बोर्ड – 2 सेमी चौडाई की 5 पट्टियां

(ii) स्केच पेन

(iii) फुटा

(iv) पेंसिल तथा रबर

(v) फेविकोल

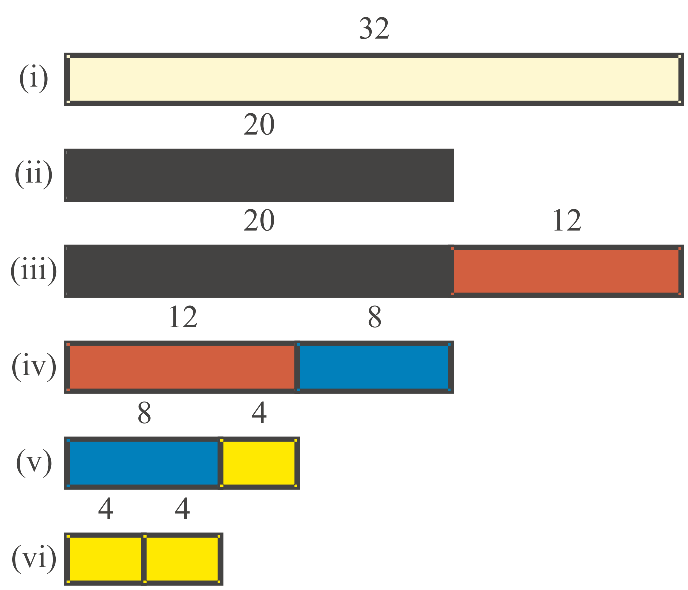
(vi) कैंची

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

माना कि हमें 20 और 32 का म.स. ज्ञात करना है। निम्न चरण कीजिए:

(i) कार्ड बोर्ड की 2 सेमी चौड़ी पट्टी में से 32 सेमी लंबाई के दो, 20सेमी लंबाई के दो, 12सेमी लंबाई के दो, 8सेमी लंबाई के दो तथा 4सेमी लंबाई के तीन टुकड़े काटिए।

(ii) कार्ड बोर्ड की इन पट्टियों को नीचे दी गई आकृति मे दर्शाए अनुसार चिपकाइए:



टिप्पणी

प्रर्दशन तथा प्रयोग:

पहली दो पट्टियां संख्याओ 32 और 20 को निरूपित करती हैं। म.स. (HCF) ज्ञात करने का अर्थ है बड़े से बड़ा उभयनिष्ट गुणनफल (32 और 20 का) ज्ञात करना अर्थात वह बड़ी से बड़ी पट्टी ज्ञात करना जो 32 सेमी और 20 सेमी को पूरा–पूरा माप सके।

(a) पहली दो पट्टियों से यह साफ है कि यह लंबाई 20 सेमी नही हो सकती क्योंकि 20 से 32 को पूरा भाग नहीं किया जा सकता।

(b) यदि हम पट्टी (ii) को पट्टी (i) के साथ रखें तो हम देखते हैं कि पट्टी (i) में 12 सेमी की लंबाई बच जाती है।

20) 32 (1
20
12

(c) पट्टी (iii) से हम देखते हैं कि वांछित लंबाई 12 सेमी नही हो सकती, क्योंकि यह 20 सेमी लंबी पट्टी को पूरी तरह भाग नही करती। पट्टी (iv) से हम देखते हैं कि 12 सेमी की पट्टी 20 सेमी की पट्टी को एक बार ढकने के बाद 8 सेमी की पट्टी बच जाती है।

12) 20 (1
12
8

(d) पट्टी (v) से हम यह देखते हैं कि वांछित लंबाई 8 सेमी नही हो सकती, क्योंकि यह 12 सेमी लंबी पट्टी को पूरी तरह नहीं भाग करती। हम देखते हैं कि 8 सेमी की पट्टी 12 सेमी की पट्टी को एक बार ढकने के बाद 4 सेमी लंबी पट्टी बच जाती है।

8) 12 (1
8
4

(e) 4 सेमी लंबी पट्टी (v) 8 सेमी पट्टी को पूरी तरह भाग करती है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि 4 सेमी लंबी पट्टी 32 सेमी तथा 20 सेमी लंबी पट्टियों को पूरी तरह से माप पाती हैं। इसलिए 32 और 20 का म.स. (HCF) 4 है।

निष्कर्ष:

दो संख्याओं का म.स. (HCF) ज्ञात करने के लिए हमें वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करनी है जो दोनों संख्याओं को भाग कर सके।

टिप्पणी

क्रियाकलाप 6

शीर्षक: तुल्य भिन्नें

अपेक्षित पूर्वज्ञान: भिन्नों की संकल्पना

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात आप तुल्य भिन्नों की संकल्पना को समझ जांएगे।

आवश्यक सामग्री:

(i) ग्लेज्ड पेपर (लाल)

(ii) सफेद वर्ग शीट

(iii) डोरी

(iv) स्केच पेन

(v) पेंसिल, रबर तथा फेविकोल

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

(a) एक वर्ग शीट पर 6 समान आकार की पट्टियां S1, S2, S3, S4, S5 तथा S6 अंकित कीजिए। हर पट्टी को शून्य को निरूपित करते बिंदु से शुरु करें। (आकृति (ii))

(b) S1 पट्टी मे 12 वर्ग हैं तथा यह 1 को निरूपित करती है।

(c) दूसरी पट्टी S2 के 2 समान भाग हैं जिनमें प्रत्येक में 6 वर्ग हैं। प्रत्येक भाग $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है (अर्थात आधी पट्टी)। इस प्रकार OA, $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है।

(d) तीसरी पट्टी S3, के 3 समान भाग हैं, जिनमें प्रत्येक में 4 वर्ग हैं। प्रत्येक भाग $\frac{1}{3}$ को निरूपित करता है (पट्टी का $\frac{1}{3}$ भाग), इस प्रकार OB, $\frac{1}{3}$ तथा OC, $\frac{2}{3}$ को निरूपित करते हैं।

(e) चौथी पट्टी S4 के 4 समान भाग हैं, जिनमें प्रत्येक में 3 वर्ग है। प्रत्येक भाग $\frac{1}{4}$ (पट्टी का $\frac{1}{4}$ भाग) निरूपित करता है। इस प्रकार OD, OE तथा OF, पट्टी S4 पर क्रमशः $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ तथा $\frac{3}{4}$ को निरूपित करते हैं।

(f) पांचवी पट्टी S5 के 6 समान भाग हैं, जिनमें प्रत्येक में 2 वर्ग हैं। प्रत्येक भाग $\frac{1}{6}$ (पट्टी का $\frac{1}{6}$ भाग) को निरूपित करता है। इस प्रकार OG, OH, OI, OJ तथा OK क्रमशः $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$ तथा $\frac{5}{6}$ को निरूपित करते हैं।

(g) छटी पट्टी S6 के 12 समान भाग हैं, जिनमें प्रत्येक मे 1 वर्ग है तथा प्रत्येक भाग $\frac{1}{12}$ (पट्टी का $\frac{1}{12}$ भाग) को निरूपित करता है। इस प्रकार OL, OM, ON, OP, OQ, OR, OS, OT, OU, OR तथा OW क्रमशः $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, तथा $\frac{11}{12}$ को निरूपित करते है।

प्रर्दशन तथा प्रयोग:

ग्लेज्ड़ पेपर तथा डोरी की सहायता से एक ही उधर्वाधर रेखा मे स्थित तुल्य भिन्नों को दिखाया जा सकता है। जैसा कि आकृति (i) तथा (ii) में दिखाया गया है।

इसलिए: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$ और इसी प्रकार

अतः $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{6}{12}$ इत्यादि तुल्य भिन्नें हैं

इसी प्रकार $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$ इत्यादि तुल्य भिन्नें हैं। इसी प्रकार $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{12}$ तुल्य भिन्नें हैं

आकृति (i)

आकृति (ii)

टिप्पणी

क्रियाकलाप 7

शीर्षक: सत्यापन करना कि दो चरों की एक रैखिक समीकरण के अनंत हल होते हैं।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: समीकरण के हल का अर्थ, ग्राफ पर बिंदूओ को अंकित करना, ग्राफ पेपर पर खींची गई एक रेखा पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक पढ़ना।

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप के करने के पश्चात, शिक्षार्थी यह प्रर्दशन करने योग्य हो जाएगा कि दो चरों की रैखिक समीकरण के अंनत हल होते हैं।

आवश्यक सामग्री:

(i) ग्लेज्ड पेपर (लाल)

(ii) फुटा

(iii) पेंसिल तथा ज्यामितीय उपकरण

(iv) ग्राफपेपर

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

$ax+by=c$ **के रूप में एक दो चरों की रैखिक समीकरण लें, जैसे** $2x-y=6$

ऐसे क्रमित युग्मों (x, y) **की सारणी बनांए जो इस समीकरण को संतुष्ट करते हों। उदाहरणतय:**

x	0	3	–1
y	–6	0	–8

ग्राफपेपर पर दी गई समीकरण का ग्राफ बनाएँ जैसाकि नीचे दी गई आकृति में दिखाया गया है।

प्रर्दशन तथा प्रयोग:

खीची गई सरल रेखा पर तीन अन्य बिंदु A (6,6) B (1,–4) तथा C (–4, –14) लें। इन बिंदुओं के निर्देशांको को दी गई समीकरण में रखिए

अर्थात

A (6,6) के लिए $2(6) - 6 = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = 6$

B (1,–4) , के लिए $2(1) - (-4) = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = 6$

C (-4, –14) के लिए $2(-4) - (-14) = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = 6$

निष्कर्ष:

आप देख सकते हैं कि बिंदुओं A, B तथा C में से प्रत्येक बिंदु, दी गई समीकरण को संतुष्ट करता है अर्थात समीकरण का वामपक्ष इसके दक्षिणपक्ष के समान हो जाता है। इसलिए इन तीनों बिंदुओं में प्रत्येक के निर्देशांक दी गई समीकरण के हल हैं। पाठक यह देख सकता है कि इस समीकरण के ग्राफ पर अनगिनत ऐसे बिंदु हैं। अत:, दो चरों की एक रैखिक समीकरण के अनन्त हल होते हैं।

क्रियाकलाप 8

शीर्षक: दो चरों के रैखिक समीकरणों के निकाय के संगत होने के प्रतिबन्ध ज्ञात करना।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: ग्राफ पेपर पर बिंदु अंकित करना।

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात, शिक्षार्थी इस योग्य हो जाएगें कि वह यह ज्ञात कर सकें तथा प्रदर्शित कर सकें कि रैखिक समीकरणों के युग्म के एक हल, अनन्त हल तथा कोई हल न होने के प्रतिबंध क्या हैं।

आवश्यक सामग्री:

(i) ग्राफ पेपर

(ii) फुटा

(iii) पेंसिल तथा ज्यामितीय उपकरण

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{aligned}$$ के रूप में दो चरों के तीन रैखिक समीकरण निकाय लें।

जैसे $x+y=4$ $\quad 2x+3y=6$ $\quad 2x+3y=6$

$2x+3y=6,$ $\quad 4x+6y=12$ $\quad 4x+6y=24$

पहले, समीकरणों के युग्म को लेकर, दो समीकरणों के लिए, क्रमित युग्म (x, y) की सारणी प्राप्त करें

जैसे $x+y=4$ के लिए

x	4	6	0
y	0	–2	4

$2x+3y=6$ के लिए

x	0	3	6
y	2	0	–2

इन दो समीकरणों का ग्राफ पेपर पर ग्राफ बनाएं, जैसाकि नीचे दी गई आकृति में दिया गया है।

शिक्षार्थी यह नोट करें कि समीकरणों को निरूपित करने वाली दो सरल रेखाएं बिंदु A (6,–2) पर काटती है अतः दो समीकरणों का एक मात्र हल है

$$x = 6, y = -2$$

अब समीकरणों का दूसरा युग्म लें तथा दोनों समीकरणों के लिए क्रमित युग्मों (x, y) की सारणी प्राप्त करें

जैसे $2x + 3y = 6$ के लिए

x	0	3	6
y	2	0	–2

$4x+6y = 12$ के लिए

x	0	3	6
y	2	0	–2

ग्राफ पेपर पर दोनो समीकरणों का ग्राफ बनांए जैसा कि नीचे आकृति में दर्शाया गया है:

शिक्षार्थी यह नोट करे कि दोनों समीकरणों को निरूपित करने वाली सरल रेखाए, एक ही हैं (सम्पाती हैं) इन रेखाओं पर असंख्य बिंदु उभयनिष्ठ है, अतः इन समीकरणों के **अनन्त** हल हैं।

अब रैखिक समीकरणों का तीसरा युग्म लें तथा दोनो समीकारणों के लिए क्रमित युग्मों (x,y) की सारणी प्राप्त करें

टिप्पणी

जैसे $2x + 3y = 6$ के लिए

x	0	3	–3
y	2	0	4

$4x + 6y = 24$ के लिए

x	0	6	–3
y	4	0	6

ग्राफ पेपर पर दोनों समीकरणों का ग्राफ बनांए, जैसा कि नीचे दी गई आकृति मे दिखाया गया हैं

शिक्षार्थी यह नोट कर सकता है कि समीकरणों को निरूपित करती रेखांए समांतर हैं, अर्थात? इन रेखाओं में कोई बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है। इसलिए दोनो समीकरणों का कोई हल नहीं है।

प्रदर्शन तथा प्रयोग: दिए गए समीकरण युग्मों के ग्राफ की सहायता से निम्नलिखित सारणी पूरी कीजिए।

क्रम संख्या	समीकरणों को निरूपित करने वाली रेखाओं के युग्म हैं	a_1/a_2	b_1/b_2	c_1/c_2
समीकरणों का पहला युग्म	प्रतिच्छेदन करते हुए	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
समीकरणों का दूसरा युग्म	सम्पाती	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
समीकरणों का तीसरा युग्म	समांतर	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

निष्कर्ष:

उपरोक्त सारणी से, $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ तथा $\frac{c_1}{c_2}$ के मानों की तुलना करने पर दो रेखाओं के प्रतिबंध प्राप्त कीजिए। आप निष्कर्ष निकालेगें कि

प्रतिच्छेदी रेखाओं के लिए $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

सम्पाती रेखाओं के लिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ तथा

समांतर रेखाओं के लिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

टिप्पणी

(i) शिक्षार्थी यह नोट कर सकता है कि दो चरों के रैखिक समीकरण निकाय का जब हल (एक या अनेक) होता है तो निकाय **संगत** कहलाता है। जब निकाय का कोई हल नही होता तो यह निकाय **असंगत** कहलाता है।

(ii) शिक्षार्थी, कुछ और उदाहरण लेकर इन प्रतिबंधो का सत्यापन कर सकता है।

क्रियाकलाप 9

शीर्षक: एक द्विघात समीकरण के मूलों तथा गुणांकों के बीच के संबंध का सत्यापन करना।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: (i) $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ के प्रकार की द्विघात समीकरण

(ii) द्विघात समीकरण के मूल।

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी, द्विघात समीकरण के मूलों तथा गुणाकों मे संबंध स्थापित कर पाएगा।

आवश्यक सामग्री:

(i) चार्ट पेपर

(ii) पेंसिल तथा रबर

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

विभिन्न द्विघात समीकरण तथा उनके मूल लिखिए

	उदाहरत्य:	**मूल**
(i)	$x^2-5x+6=0$	2, 3
(ii)	$x^2-x-6=0$	3,–2
(iii)	$4x^2-8x+3=0$	3/2, 1/2
(iv)	$x^2-4x+1=0$	$2+\sqrt{3}$, $2,-\sqrt{3}$
(v)	$x^2+8x+15=0$	–3, –5

मूलों को संगत समीकरणों में रख कर सत्यापन कीजिए

प्रदर्शन तथा प्रयोग

चार्ट पेपर पर निम्न सारणी बनाइए

क्रम संख्या	द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$	मूल α,β	मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)$	मूलों का गुणनफल $\alpha\beta$	–b/a	c/a
1.	$x^2-5x+6=0$	$\alpha=2,\beta=3$	5	6	5	6
2.	$x^2-x-6=0$	$\alpha=3,\beta=-2$	1	– 6	1	– 6
3.	$4x^2-8x+3=0$	$\alpha=3/2,\beta=1/2$	2	3/4	2	3/4
4.	$x^2-4x+1=0$	$\alpha=2+\sqrt{3},\beta=2-\sqrt{3}$	4	1	4	1
5.	$x^2+8x+15=0$	$\alpha=-3,\beta=-5$	– 8	15	–8	15

टिप्पणी

निष्कर्षः

समीकरण $ax^2+bx+c=0, a \neq 0$ में

मूलों का योगफल $(\alpha+\beta) = -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}.$

मूलों का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}.$

टिप्पणीः

इस क्रियाकलाप के परिणाम को निम्न में प्रयोग किया जा सकता हैः

(i) एक द्विघात समीकरण बनाना, जब इसके मूल दिए हुए हों।

(ii) मूलों को ज्ञात किए बिना, द्विघात समीकरण के मूलों का योगफल तथा गुणनफल ज्ञात करना।

टिप्पणी

क्रियाकलाप 10

शीर्षक: ग्राफ द्वारा सत्यापन करना कि एक द्विघातीय बहुपद के अधिकतम दो शुन्यक हो सकते हैं।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: (i) एक बिंदु के निर्देशांकों से बिंदु को ग्राफ पर अंकित करना

(ii) एक द्विघातीय बहुपद के शून्यक ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री:

(i) ग्राफ पेपर (कम से कम 3)

(ii) ज्यामिति बाक्स

(iii) पेंसिल तथा रबर।

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

अलग–अलग a, b, c के $ax^2+bx+c, a\neq 0$ की प्रकार के द्विघात बहुपद लीजिए, जैसे

(i) $p(x)=x^2-5x+6$

(ii) $q(x)=-x^2-3x+4$

(iii) $r(x)=x^2-6x+9$

(iv) $g(x)=x^2-4x+8$

x के भिन्न–भिन्न मानों के लिए बहुपदों के मान ज्ञात कर, $[x,p(x)]$ को अंकित कर, दिए गए बहुपदों के ग्राफ बनाईए।

टिप्पणी

प्रदर्शन तथा प्रयोगः

बहुपद	ग्राफ जो खुलता है ऊपर की ओर/नीचे की ओर	शुन्यकों की संख्या
$p(x)=x^2-5x+6$	ऊपर की ओर	दो
$q(x)=4-3x-x^2$	नीचे की ओर	दो
$r(x)=x^2-6x+9$	ऊपर की ओर	एक
$g(x)=x^2-4x+8$	ऊपर की ओर	कोई भी नहीं

निष्कर्षः

(i) बहुपद ax^2+bx+c का ग्राफ

(a) ऊपर की ओर खुलता है यदि $a>o$

(b) नीचे की ओर खुलता है यदि $a<o$

(ii) द्विघात बहुपद के शुन्यकों की अधिकतम संख्या दो हो सकती है।

टिप्पणी

क्रियाकलाप 11

शीर्षक: सत्यापन करना कि दी गई श्रेढ़ी एक समांतर श्रेढ़ी है।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: श्रेढ़ियों का ज्ञान, समानातर श्रेढ़ी (AP) की परिभाषा।

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी, दी गई श्रेढ़ियों मे से समानांतर श्रेढ़ी की पहचान करने योग्य हो जाएगा।

आवश्यक सामग्री:

(i) 1 सेमी x1 सेमी आकार के वगों वाला वर्ग पेपर

(ii) कैंची

(iii) गोंद/फेविकोल

(iv) फुटा, पेंसिल

(v) ज्यामितीय उपकरण।

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

धनात्मक संख्याओं की निम्न श्रेढ़ियों पर विचार करें

1, 4, 7, 10, 13, 16, ---

तथा 2,3,6,10,12,15,17, ---

पहली श्रेढ़ी के लिए, रगींन कागज से 1सेमी चौड़ाई की पट्टियां काटें जिनकी लंबाइयां 1 सेमी, 4सेमी, 7 सेमी, 10 सेमी, ... हों। इन पट्टियों को एक वर्ग पेपर पर, इसी क्रम में चिपकांए, जैसाकि आकृति (i) में दिखाया गया है।

आकृति (i)

दूसरी श्रेढ़ी के लिए, दूसरे रंग के कागज से 1 सेमी चौड़ाई की पट्टियां काटें लंबाइयां 2 सेमी, 3सेमी, 6 सेमी, 10 सेमी, ... हों। इन पट्टियों को एक वर्ग पेपर पर, इसी क्रम में चिपकांए, जैसाकि आकृति (ii) में दिखाया गया है।

आकृति (ii)

प्रर्दशन तथा प्रयोगः

पहली श्रेढ़ी के लिए, रगींन पट्टियां एक सीढ़ी बनाती हैं जिनमे आसन्न पट्टियों की ऊचाइयों का अन्तर अचर है (यहाँ 3 सेमी है) दूसरी श्रेढ़ी के लिए रगींन पट्टियाँ सीढ़ी बनाती है जिनमें आसन्न पट्टियों की ऊँचाइयों का अन्तर अचर नही है।

निष्कर्षः

पहली श्रेढ़ी के लिए, जोकि एक समांतर श्रेढ़ी है, आसन्न पट्टियों की ऊचाइयों का अन्तर (जो एक सीढ़ी बनाती हैं) अचर है परन्तु दूसरी श्रेढ़ी, जोकि एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है, में सीढ़ी की आसन्न पट्टियों की ऊचाइयों में अतंर अचर नहीं है।

अतः, यदि किसी श्रेढ़ी के आसन्न पदों में अन्तर अचर हो, तो यह श्रेढ़ी समांतर है, अन्यथा नहीं है।

नोटः यदि श्रेढ़ी समांतर है, तो पट्टियों के शिखरों के दांए शीषों को मिलाने पर एक सरल रेखा प्राप्त होती है, जबकि यदि श्रेढ़ी समांतर नहीं है तो यह सरल रेखा नहीं बनती।

टिप्पणी

क्रियाकलाप 12

शीर्षकः पहली n विषम प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात करना।

अपेक्षित पूर्वज्ञानः (i) विषम प्राकृत संख्याएँ

(ii) n वीं विषम संख्या $2n–1$ के रूप में लिखी जा सकती है।

उद्देश्यः इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी, इस योग्य हो जाएगा कि वह व्यापक रूप से यह बता सके कि पहली n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 है।

आवश्यक सामग्रीः

(i) सफेद चार्ट पेपर

(ii) फुटा, पेंसिल तथा रबर

(iii) रंगीन बाल पेन

(iv) कैंची

(v) ज्यामितीय उपकरण।

क्रियाकलाप के लिए तैयारीः

(i) एक सफेद चार्ट पेपर ले कर उसमें से 10 सेमी $\times$10 सेमी का एक वर्ग काटें तथा इस वर्ग की परिसीमा को चिन्हित कीजिए।

(ii) इस वर्ग में 1 सेमी $\times$1 सेमी के छोटे वर्ग बनाने के लिए क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर रेखांए खींचिए, जैसाकि आकृति (i) में दिखाया गया है।

(iii) छोटे वर्गों में रंगींन पेनों की सहायता से अलग–अलग रंग भरिए, जैसाकि आकृति (i) में दिखाया गया है।

आकृति (i)

टिप्पणी

प्रदर्शन तथा प्रयोग

भूरे रंग के छोटे वर्गों की संख्या **एक** है

हरे रंग के छोटे वर्गों की संख्या **तीन** है

लाल रंग के छोटे वर्गों की संख्या **पांच** है

पीले रंग के छोटे वर्गों की संख्या **सात** है

आसमानी रंग के छोटे वर्गों की संख्या **नौ** है

बैंगनी रंग के छोटे वर्गों की संख्या **ग्यारह** है

अब 1 सेमी $\times$1 सेमी वर्ग में छोटे वर्गों की संख्या (भूरे रंग) $1 = 1^2$

2 सेमी $\times$2 सेमी के वर्ग में छोटे वर्गों की (भूरे + हरे) की संख्या $= (1+3) = 4 = 2^2$

3 सेमी $\times$3 सेमी के वर्ग में छोटे वर्गों की (भूरे + हरे + लाल) की संख्या $= 1+3+5 = 9 = 3^2$

4 सेमी $\times$4 सेमी का के वर्ग में छोटे वर्गों (भूरे + हरे + लाल + पीले) की संख्या $= 1+3+5+7 = 16 = 4^2$

(भूरे + हरे +लाल +पीले +आसमानी) रंग के छोटे वर्गों की कुल संख्या $= 1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$

(भूरे + हरे +लाल +पीले +आसमानी +बैंगनी) रंग के छोटे वर्गों की कुल संख्या $= 1+3+5+7+9+11 = 36 = 6^2$

और इसी प्रकार ....

निष्कर्ष:

(i) इस प्रकार बढ़ते हुए हम देखते हैं कि n सेमी $\times$n सेमी के वर्ग के कुल छोटे वर्गों की संख्या $1+3+5+7+9+11+ \ldots\ldots\ldots + (2n-1) = n^2$

अतः हम कह सकते हैं कि प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योगफल n^2 है।

टिप्पणी

क्रियाकलाप 13

शीर्षक: प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात करना।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: (i) प्राकृत संख्याएँ तथा उन पर संक्रियाएँ

(ii) वर्ग तथा आयत के क्षेत्रफल

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी, प्रथम n प्राकृत सख्याओं का योगफल निकालने मे सक्षम हो जाएगा।

आवश्यक सामग्री:

(i) चार्ट पेपर

(ii) फुटा, पेंसिल तथा रबर

(iii) रंगों का बाक्स/रंगीन बाल पेन

(iv) कैंची/कटर

(v) ज्यामितीय उपकरण।

आकृति (i)

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

(i) 10 सेमी x 11 सेमी आकार का एक चार्ट पेपर ABCD काटिए तथा इसकी परिसीमा अकिंत कीजिए।

(ii) उपरोक्त आयताकार चार्ट पेपर में 1 सेमी x 1 सेमी के वर्ग बनाने के लिए क्षैतिज तथा ऊधर्वाधर रेखांए खींचिए, जैसाकि आकृति (i) में दिखाया गया है।

(iii) ऊर्घ्वाघर दिशा में वर्गो को 1,2,3 ....,10 से तथा क्षैतिज दिशा में वर्गो को 1,2,3......,10,11 से अकिंत कीजिए।

(iv) बांई ओर के किनारे के शिखर बिंदु से आरम्भ करते हुए। 1 सेमी $\times$1 सेमी के वर्ग 2 सेमी $\times$1 सेमी की आयत, 3 सेमी $\times$1 सेमी की आयत, ... में विभिन्न रंगों से रंग भरिए, जैसा कि आकृति (i) में दिखाया गया है।

प्रदर्शन तथा प्रयोग:

(i) आकृति में रंगदार क्षेत्र का क्षेत्रफल +2 सेमी $\times$1 सेमी आकार के आयत का क्षेत्रफल +.........+ 10 सेमी $\times$1 सेमी आकार के आयत का क्षेत्रफल

= (1 + 2 +3 + ...+10) वर्ग सेमी

(ii) रंगदार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आयत ABCD का क्षेत्रफल)

(iii) आयत ABCD का क्षेत्रफल = 10 सेमी $\times$11 सेमी = (10 $\times$11) वर्ग सेमी

(iv) रंगदार क्षेत्र का क्षेत्रफल = ($\frac{1}{2}$ $\times$ 10 $\times$11) वर्ग सेमी

(i) तथा (iv) से 1+2+3+.........+ 10 = $\frac{1}{2}$ (10 x 11)

इसी प्रकार बढ़ते हुए तथा व्यापक परिणाम लिखते हुए हमें प्राप्त होता है

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}\left[n(n+1)\right]$$

निष्कर्ष:

प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

टिप्पणी

क्रियाकलाप 14

शीर्षक: एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों पर योगफल ज्ञात करना

अपेक्षित पूर्वज्ञान: संमातर श्रेढ़ी का ज्ञान

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी एक समांतर श्रेढ़ी के कितने ही पदों का योगफल ज्ञात करने योग्य हो जाएगा।

आवश्यक सामग्री:

(i) प्लास्टिक की पट्टियाँ

(ii) रंगदार चार्ट पेपर

(iii) थरमोकोल शीटें

(iv) फेवीकोल

(v) कैंची

(vi) फुटा, पेंसिल तथा रबर।

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

(i) एक आयताकार थरमोकोल शीट ABCD लीजिए।

(ii) कुछ प्लास्टिक की पट्टियॉ एक स्थिर लंबाई a, की काटें तथा कुछ अन्य लंबाई d की काटें।

(iii) दोनो प्रकार की पट्टियों को व्यवस्थित करके इस प्रकार चिपकांए कि हमें $a, a+d, a+2d, \ldots\ldots\ldots,$ $a+9d$ पद इस प्रकार प्राप्त हों कि यह एक दूसरे से इकाई दूरी पर हो तथा आयत में दिखाई गई आकृति के अनुसार व्यवस्थित हों।

(iv) अन्तिम पट्टी BC, F पर खत्म होती है, F को C तक एक निश्चित दूरी a द्वारा बढ़ाएँ।

प्रदर्शन तथा प्रयोग:

(i) पहली पट्टी की लम्बाई a है।

(ii) दूसरी पट्टी की लम्बाई a+d है।

(iii) तीसरी पट्टी की लम्बाई a+2d है।

(iv) दसवीं पट्टी की लम्बाई a+9d है।

(v) व्यवस्थित पट्टियाँ एक सीढ़ी जैसी दिखाई देती हैं।

(vi) उपरोक्त समांतर श्रेणी का योगफल

$= a + (a+d) + (a+2d) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (a+9d)$

$= 10a + 45d$

$= 5\ (2a+9d) = 1/2\ .10.\ (2a+9d) = 1/2.\ 10\ [2a+(10-1)d]$

$= \frac{1}{2}$ (आयात ABCD का क्षेत्रफल, जहाँ लंबाई BC=2a+9 तथा चौड़ाई 10 इकाई है)

निष्कर्ष:

यदि समांतर श्रेणी a, a+d, a+2d, ..., a+ (n-1)d है, तो इसके प्रथम n पदों का योगफल

$$= \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$ है।

क्रियाकलाप 15

शीर्षक: सत्यापन करना कि त्रिभुज के कोणों का योगफल 180° होता है।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: (i) कोण तथा त्रिभुज

(ii) कोणों तथा त्रिभुजों की रचना करना।

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी इस योग्य हो जाएगा कि

(i) यह सत्यापन तथा प्रदर्शन कर सके कि त्रिभुज के कोणो का योग 180° होता है।

(ii) एक त्रिभुज के एक कोण की माप ज्ञात कर सके जबकि अन्य दो कोणों के माप दिए गए हों।

आवश्यक सामग्री:

(i) रंगीन ग्लेज्ड पेपर

(ii) रंगीन कार्ड बोर्ड (पेपर)

(iii) फुटा

(iv) पेंसिल, रबर

(v) फेविकोल

(vi) कैंची/कटर।

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

(i) नांरगी रंग का कार्डबोर्ड लीजिए।

(i) एक मोटे सफेद पेपर पर त्रिभुज ABC खींचिए। त्रिभुजाकार क्षेत्र को काटिए तथा इसे कार्डबोर्ड पर चिपकाइए। (आकृति (i))

आकृति (i) आकृति (ii)

प्रदर्शन तथा प्रयोग:

(i) त्रिभुजाकार क्षेत्र में से कोण BAC, ACB तथा CBA काटिए इन्हे क्रमशः पीले, ग्रे तथा हरे रंग से रंगिए।

(ii) इन कटे हुए कोणों के टुकड़ों को आकृति (ii) मे दिखाए अनुसार, एक कागज की शीट पर चिपकाइए।

(iii) यह देखा जा सकता है कि तीनों कोण मिलकर एक सरल रेखा बनाते हैं, जोकि यह दर्शाता है कि इनका योगफल 180° है।

निष्कर्ष:

किसी भी त्रिभुज के कोणों का योगफल 180° होता है।

टिप्पणी

क्रियाकलाप 16

शीर्षक: सत्यापित करना कि किसी त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।

अपेक्षित पूर्वज्ञान:
(i) त्रिभुजों की रचना
(ii) त्रिभुजों की सर्वांगसमता
(iii) कागज मोड़ना तथा अध्यारोपण

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी इस सकल्पना को प्रदर्शित करने मे सक्षम होंगे तथा इस ज्ञान का प्रयोग उन प्रश्नों के हल में कर सकेंगे जिनमे इसकी आवश्यकता है।

आवश्यक सामग्री:

(i) 25 सेमी $\times$ 30 सेमी आकार के सलेटी कार्डबोर्ड शीट
(ii) पैसिल
(iii) रबड़
(iv) फेविकोल
(v) परकार
(vi) स्केल (पैमाना)
(vii) कैंची / कटर।

टिप्पणी

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

(i) एक बड़े सफेद बोर्ड पर 25 सेमी $\times$ 30 सेमी के माप का सलेटी कार्ड बोर्ड चिपकाएँ

(ii) कार्डबोर्ड पर एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें AB=AC है तथा सफेद कागज पर ÄABC की प्रतिलिपि बनाइए।

(iii) सफेद कागज़ पर बनी ÄABC में कागज मोड़ने की विधि से AD माध्यिका बनाइए।

(iv) त्रिभुज के दोनों भागों में अलग–अलग रंग भरिए तथा बोर्ड पर बनी त्रिभुज पर इसे चिपकाइए जैसा आकृति मे दर्शाया गया है।

(v) परत AD को बोर्ड पर ढीला रखिए

प्रदर्शन तथा प्रयोग:

(i) चिपकी हुई त्रिभुज ABC को AD के अनुदिश मोड़िए।

(ii) देखिए कि बिन्दु C, बिन्दु B पर स्थित है तथा AC, AB के अनुदिश गिरती है। आप देखते हैं कि CD, BD के अनुदिश गिरती है जो यह दर्शाती है कि $\angle ABC = \angle ACB$

निष्कर्ष:

किसी त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।

क्रियाकलाप 17

शीर्षक: मध्य–बिन्दु प्रमेय का सत्यापन।

अपेक्षित पूर्वज्ञान:
(i) समांतर रेखाओं का ज्ञान
(ii) समांतर चतुर्भुजों का ज्ञान
(iii) एक चतुर्भुज के समांतर चतुर्भुज होने की कसौटियों का ज्ञान

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी इस योग्य हो जायेंगे कि वह
(i) इस परिणाम की महत्ता को समझें
(ii) जब कभी अन्य परिणामों के सिद्ध करने का प्रयोग हो इसे प्रयोग कर सकें

आकृति (i)

आवश्यक सामग्री:
(i) नारंगी रंग का मोटा बोर्ड
(ii) रंगीन तथा सफेद कागज़
(iii) गोंद / फेविकोल
(iv) कैंची / कटर
(v) परकार
(vi) पैंसिल तथा स्कैच पेन
(vii) स्केल तथा रबड़

क्रियाकलाप के लिए तैयारीः

(i) नारंगी रंग के मोटे बोर्ड में से 25 सेमी $\times$ 20 सेमी साईज का एक वर्ग काटिए

(ii) कागज़ के एक शीट से त्रिभुज ABC काटिए

(iii) कागज़ मोड़ने की प्रक्रिया से भुजाओं AB तथा AC के मध्य बिन्दु P तथा Q ज्ञात कीजिए। एक क्रीज डाल कर P तथा Q को मिलायें।

(iv) ÄABC से एक अन्य त्रिभुज APQ काटिए तथा AQ का QC पर इस प्रकार अध्यारोपण कीजिए कि QP, CB के अनुदिश पड़े, जैसा कि आकृति मे दिखाया गया है।

प्रदर्शन तथा प्रयोगः

$$\Delta APQ \cong \Delta QRC$$

$$AP = QR = \frac{1}{2} AB = PB$$

तथा $\angle APQ = \angle QRC = \angle PBC; \angle PBC + \angle QRB = 180^{O}$

PQRB एक समांतर चतुर्भुज है

PQ=BR = 1/2 BC

तथा $PQ \parallel BC$

निष्कर्षः

त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर है तथा उसका आधा है

टिप्पणी

क्रियाकलाप 18

शीर्षक: आधारभूत समानुपाती प्रमेय का सत्यापन करना

अपेक्षित पूर्वज्ञान:
(i) समांतर रेखाओं का ज्ञान तथा उनकी रचना
(ii) त्रिभुजों, त्रिभुजाकार क्षेत्रों का ज्ञान तथा उनकी रचना
(iii) अनुपात तथा समानुपात की संकल्पना

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी इस योग्य हो जायेंगे कि वह

(i) इस प्रमेय का प्रदर्शन कर सकें तथा उन स्थितियों में इसका प्रयोग कर सकें जहाँ इस प्रमेय के प्रतिबंध पूरे होते हैं।

आवश्यक सामग्री:

(i) खॉचों वाले स्टैन्ड, ताकि इन मे रखी गई कोई छड़, जो इन पर घिरनी द्वारा जमा कर बैठायी गयी हैं, सीधी रहे।
(ii) पीले रंग से रंगा लकड़ी का बोर्ड
(iii) (मोटे कागज़ का) एक त्रिभुजाकार क्षेत्र
(iv) निशान लगे (Graduated) स्केल (कम से कम 4)
(v) पेंच तथा पेंचकस
(vi) गोंद / फेविकोल

(vii) स्कैच पैन/कैंची

(viii) धिरनियां

(ix) अलग–अलग साइज के कील (खाँचों में धिरनियों को ठीक से बैठाने (fix) के लिए)

क्रियाकलाप के लिए तैयारीः

(i) पीले लकड़ी के बोर्ड को लेकर उसे पेचों की सहायता से स्टैंड पर पक्का जड़ें (fix)

(ii) स्टैंड पर कीलों की सहायता से धिरनियों को जड़ें

(iii) मोटे कागज़ से एक त्रिभुजाकार आकृति ABC काटकर लकड़ी के बोंड पर चिपकाइए

(iv) त्रिभुज ABC की भुजाओं के अनुदिश तीन निशान लगे स्केल जड़ें और देखें कि त्रिभुज का आधार BC है

(v) घिरनियों की सहायता से एक सीधा स्केल, त्रिभुज के आधार के समांतर, कीलों से इस प्रकार जड़ें कि स्केल आधार के समांतर बोर्ड पर ऊपर तथा नीचे जा सके।

प्रदर्शन तथा प्रयोगः

A.

(i) क्षैतिज स्केल PQ को एक जगह रख कर दूरिंया AD, BD, AE तथा CE भुजाओं AB तथा AC पर लगे स्केलों पर पढ़े

(ii) DE तथा BC की लंबाइयां भी पढ़ें

(iii) $\frac{AD}{BD}, \frac{AE}{CE}$ को परिकलित कीजिए

(iv) आप देखेंगें कि $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$ है

B. क्षैतिज स्केल की स्थिति R तथा S पर रख कर फिर अनुपात $\frac{AX}{XB}$ तथा $\frac{AY}{YC}$ ज्ञात करें आप फिर पायेंगे कि सभी अनुपात समान हैं, जो आधारभूत समानुपाती प्रमेय को सत्यापित करता है

प्रेक्षणः

आप यह भी देख सकते है कि

(i) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

तथा (ii) $\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC} = \frac{XY}{BC}$

निष्कर्षः

यादि एक त्रिभुज की एक एक भुजा के समांतर, शेष दो भुजाओं को प्रच्छेदित करती एक रेखा खींची जाए, तो वह अन्य दो भुजाओं को एक ही अनुपात में बाटती है

क्रियाकलाप 19

शीर्षक: पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन

अपेक्षित पूर्वज्ञान:

(i) त्रिभुजों के बारे में ज्ञान तथा उनके प्रकार

(ii) त्रिभुजो की समरुपता

(iii) अनुपात तथा समानुपात की धारणा

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी इस योग्य हो जायेंगे कि

(i) दी गई त्रिभुजों में से समकोण त्रिभुज पहचान पांए।

(ii) इस कार्यकलाप के परिणाम का प्रयोग प्रशनों का सरल करने/हल करने में कर सके

आवश्यक सामग्री:

(i) पीला कार्ड बोर्ड

(ii) विभिन्न रंगों के कागज

(iii) पैन/मार्कर

(iv) फेविकोल

(v) पैंसिल/कटर

(vi) रबड़

(vii) ड्राइंग पिन

टिप्पणी

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

(i) 10 सेमी $\times$ 10 सेमी आकार का पीला कार्डबोर्ड काटिए

(ii) नारंगी रंग के कागज़ पर (a+b) भुजा का वर्ग बनाइए (जहाँ a=3 सेमी तथा b=1 सेमी) तथा उसे ABCD का नाम दीजिए

(iii) भुजाओं AB, BC, CD तथा DA पर क्रमशः बिन्दु P,Q,R तथा S ऐसे लीजिए कि AP = BQ = CR = DR = DS = b (1 सेमी)

(iv) वर्ग ABCD को पीले बोर्ड पर चिपकाइए

(v) नारंगी वर्ग पर, वर्ग PQRS चिपकाइए जिसकी भुजा PQ (अथवा QR = c (माना)) है, जो एक हरे रंग के कागज़ का बनाया गया है

प्रदर्शन तथा प्रयोग:

(i) वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $=(a+b)^2$ वर्ग इकाई $=(a^2+b^2+2ab)$ वर्ग इकाई

(ii) वर्ग PQRS का क्षेत्रफल $= c^2$

(iii) चार नारंगी त्रिभुजाकार क्षेत्रों के क्षेत्रफल समान है क्योंकि वह सर्वांगसम हैं (SSS से) उनका मिलकर क्षेत्रफल =4 (1/2 ab) =2ab

अब, वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = वर्ग PQRS का क्षेत्रफल +4 नारंगी त्रिभुजों का क्षेत्रफल अर्थात $a^2+b^2+2ab=c^2+2ab \Rightarrow c^2=a^2+b^2$ जो पाइथागोरियन प्रमेय को सत्यापित करता है

निष्कर्ष:

(i) किसी समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गो के योग के बराबर है

(ii) एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं को "पाइथगोरियन त्रिक" कहते हैं। उदाहरण के लिए

a) 3,4,5 b) 5,12,13 c) 7, 24,25 इत्यादि

(iii) पाइथागोरस प्रमेय का विलोम भी सत्य है जैसे यदि किसी त्रिभुज के लिए $c^2 = a^2 + b^2$ है, तो त्रिभुज में C पर समकोण है, जहाँ BC=a, AB=c तथा AC=b है

क्रियाकलाप 20

शीर्षक: सत्यापन करना कि दो समरुप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गो के अनुपात के बराबर है

अपेक्षित पूर्वज्ञान:

(i) त्रिभुजों के क्षेत्रफल

(ii) समरुपता की संकल्पना

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी सक्षम हो जायेंगे कि वह इस परिणाम को ज्यामिति के प्रश्नों को हल करने में, जहाँ आवश्यकता होगी, उपयोग कर सकेंगे

आवश्यक सामग्री:

(i) मोटे रगंदार शीट

(ii) रंगीन तथा लाईनदार कागज़

(iii) कैंची

(iv) फेविकोल

(v) स्कैच पैन

(vi) स्केल (पैमाना)

(vii) परकार

(viii) ड्राइंग पिन

(ix) निशान लगाने वाले पेन (मार्कर)

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

(i) एक मोटा रंगदार शीट लेकर इस पर स्केल, परकार तथा मार्कर की सहायता से 5 सेमी भुजा वाली एक समबाहु त्रिभुज (AB_1C_1) बनाइए

(ii) प्रत्येक भुजा को 5 समान भागों में बांटिए, तथा विभाजन बिन्दुओं से त्रिभुज की भुजाओं के समांतर रेखाएं खीचिए। इस प्रकार आप एक आकृति जिसमें 25 समबाहु त्रिभुजे है (जो सर्वागंसम भी है) पायेगे

(iii) जैसा कि आकृति मे दिखाया गया है, उन पर पीले तथा लाइनदार त्रिभुज कागज़ चिपकाएँ

टिप्पणी

प्रदर्शन तथा प्रयोगः

त्रिभुज ABC तथा AB^1C^1 से हमे मिलता है

$$\frac{ar(ABC)}{ar(AB'C')} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{B'C'^2}$$

इसी प्रकार $$\frac{ar(ABC)}{ar(AB''C'')} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B''C''}\right)^2 = \frac{BC^2}{B''C''^2}$$

इसी प्रकार $$\frac{ar(ABC)}{ar(AB'''C''')} = \frac{1}{16} = \frac{(BC)^2}{B'''C'''^2}$$

तथा $$\frac{ar(ABC)}{ar(AB_1C_1)} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}$$

निष्कर्षः

दो समरुप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = उनकी सगंत भुजाओं के वर्गों का अनुपात।

टिप्पणी

क्रियाकलाप 21

शीर्षक: एक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

अपेक्षित पूर्वज्ञान: (i) वृत्त की संकल्पना

(ii) वृत्त तथा उससे संबंधित पद

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप के आरंभ तथा समाप्ती के पश्चात आप सक्षम हो जायेंगे कि आप वृत्त का सही क्षेत्रफल ज्ञात कर सकें तथा जहाँ आवश्यकता हो, इसका उपयोग कर सकें

आवश्यक सामग्री:

(i) विभिन्न रंगों के धागे

(ii) परकार

(iii) पैंसिल

(iv) कैंची

(v) फेवीकोल

(vi) मोटा पीला कार्डबोर्ड

आकृति (ii)

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

(i) 15 सेमी $\times$ 15 सेमी आकार का मोटा पीला कार्डबोर्ड काटें

(ii) परकार के प्रयोग से उस पर सकेन्द्री वृत्त बनायें जैसा आकृति (i) में दिखाया गया है

(iii) इन सकेन्द्री वृत्तों पर अलग–अलग रंग के धागे सजायें जैसा आकृति (i) में दिखाया गया है

(iv) सबसे अन्दर वाले वृत्त से आरम्भ करके सबसे बाहर वाले वृत्त तक वृत्तों के धागों को काटकर जैसा आकृति (ii) में दिखाया गया है, त्रिभुज के रूप में लगायें

प्रदर्शन तथा प्रयोगः

माना सबसे बाहरी वृत्त की त्रिज्या r है

$\therefore$ त्रिभुज ABC के आधार की लम्बाई $= 2\pi r$ इकाई है

त्रिभुज ABC के शीर्ष लम्ब AD की लम्बाई = r इकाई

वृत्त का क्षेत्रफल = त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} BC \times AD = \frac{1}{2}(2\pi r)(r)$ वर्ग इकाई

$= \pi r^2$ वर्ग इकाई

प्रेक्षणः

(i) कटे हुऐ धागे सजाने पर लगभग एक त्रिभुज की आकृति बनाते हैं

(ii) बगैर कुछ बर्बादी के वृत्त का क्षेत्रफल = काट कर लगाये गये धागों द्वारा बनी आकृति का क्षेत्रफल

निष्कर्षः

r त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 है

क्रियाकलाप 22

टिप्पणी

शीर्षकः प्रदर्शित कीजिए कि एक चक्रीय चतुर्भज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं

अपेक्षित पूर्वज्ञानः चक्रीय चतुर्भज की संकल्पना

उद्देश्यः उपरोक्त को दर्शाने के लिए एक माडल बनाना।

आवश्यक सामग्रीः

(i) प्लाईबोर्ड

(ii) रंगीन कार्डबोर्ड

(iii) ड्राइंग पिन

(iv) चिकना कागज़

(v) स्कैच पैन

(vi) फेविकोल

(vii) कैंची

टिप्पणी

क्रियाकलाप के लिए तैयारी:

(i) कार्डबोर्ड शीट से 5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त काटकर उस पर पीला चमकीला कागज़ चिपकाएँ

(ii) पीले चमकीले कागज़ पर एक चक्रीय चर्तुभुज ABCD बनाइए तथा उसकी भुजा CD के दोनों और E तथा F तक बड़ाकर बाह्य कोण ADE तथा BCF बनायें

(iii) $\angle A$ तथा $\angle B$ का कुछ भाग काटकर उन्हे बाह्य कोणों BCF तथा ADE पर चिपकायें जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है

(iv) आप देख सकते हैं कि $\angle D + \angle ADE = 180^0 \Rightarrow \angle D + \angle B = 180^0$

तथा $\angle C + \angle BCF = 180^0 \Rightarrow \angle A + \angle C = 180^0$

प्रदर्शन तथा प्रयोग:

इस माडल का प्रयोग निम्न के सत्यापन में किया जा सकता है

(i) चक्रीय चतुर्भज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं

(ii) चक्रीय चतुर्भज का बाह्य कोण उसके आन्तरिक सम्मुख कोण के बराबर होता है

टिप्पणी

क्रियाकलाप 23

शीर्षकः सत्यापित करना कि संर्वागसम वृत्तों की समान जीवाए वृत्त के केन्द्र पर समकोण बनाती हैं।

अपेक्षित पूर्वज्ञानः (i) वृत्त से संबधित पद

(ii) त्रिभुजों की संर्वागसमता

उद्देश्यः इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी सक्षम हो जायेंगे कि इस परिणाम को बता सकें तथा इसका सत्यापन कर सकें

आवश्यक सामग्रीः

(i) रंगीन कागज़

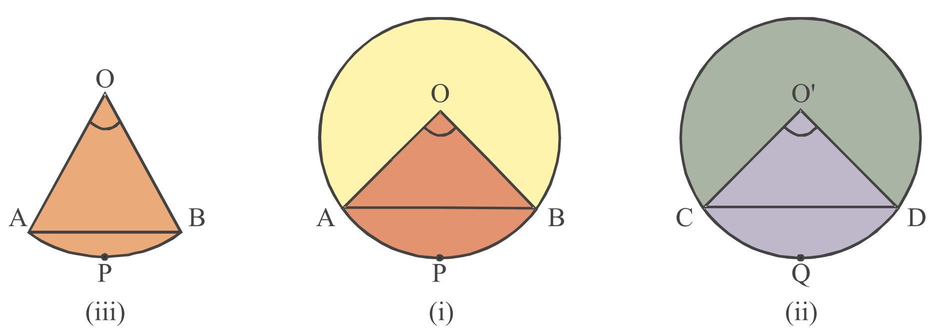
(ii) स्कैच पैन

(iii) पैंसिल तथा पैमाना

(iv) रबड़

(v) कैंची

(vi) फेवीकोल



क्रियाकलाप के लिए तैयारीः

(i) दो संर्वागसम वृत्त (समान त्रिज्या के), जिनके केन्द्र O तथा O' हैं, एक पीले कागज़ पर तथा दूसरा हरे कागज़ पर बनायें

(ii) पीले कागज़ पर एक जीवा AB तथा हरे कागज़ पर जीवा CD ऐसी बनाये कि लम्बाई CD = लम्बाई AB

(iii) AO तथा BO को तथा CO' तथा DO' को मिलायें

टिप्पणी

प्रदर्शन तथा प्रयोगः

(i) पीले कागज़ पर बने वृत्त से त्रिज्य खंड AOBP काटें तथा उसकी एक प्रतिलिपी बनाकर हरे कागज़ पर बने वृत्त पर इस प्रकार रखें कि AOBP, CO' DQ पर पड़े

(ii) आप देखेंगे कि त्रिज्य खंड AOBP त्रिज्यखंड CO' DQ को पूरा ढक लेता है जो दर्शाता है कि $\angle AOB = \angle CO'D$

निष्कर्षः यह सिद्ध करता है कि सर्वागंसम वृत्तों की समान जीवाएँ वृत्त के केन्द्र पर समान कोण बनाती हैं

अनुप्रयोगः आप यह भी सत्यापित कर सकते हैं कि चापों, जो वृत्त के केन्द्र पर समान कोण बनाती हैं, की लम्बाईयाँ भी समान होती हैं।

टिप्पणी

क्रियाकलाप 24

शीर्षक: एक समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात करना

अपेक्षित पूर्वज्ञान: एक समलंब की पहचान तथा उससे संबधित पदों का ज्ञान

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप के पश्चात शिक्षार्थी सक्षम हो जायेंगा कि वह समलंब के क्षेत्रफल का सूत्र लिख सके तथा विभिन्न समलंबों का क्षेत्रफल ज्ञात कर सके

आवश्यक सामग्री:

(i) रंगीन कागज़

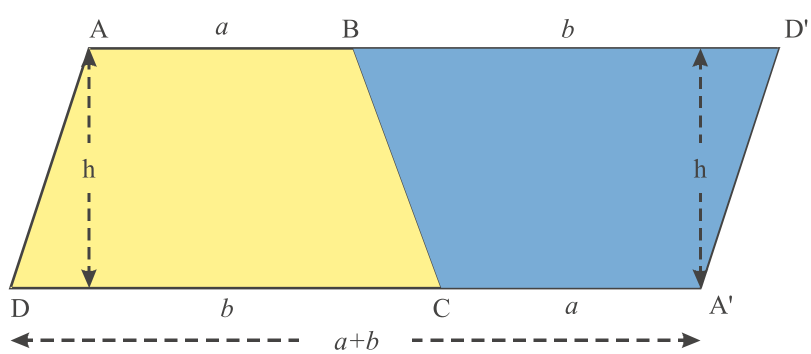
(ii) ज्यामिति बॉक्स

(iii) फेविकोल

(iv) कैंची

(v) थर्मोकोल

(vi) हार्डबोर्ड



आकृति (i)

क्रियाकलाप के लिए तैयारी :

(i) हार्डबोर्ड का एक टुकड़ा लीजिए

(ii) पीले नीले कागजों से दो सर्वागसम समलंब, जिनकी समांतर भुजाएँ a तथा b हैं, बनाइए

(ii) जैसा आकृति में दिखाया गया है दोनों समलंबों को हार्डबोर्ड पर चिपकाइए

प्रदर्शन तथा प्रयोगः

यह आसानी से देखा जा सकता है कि समलंब मिलकर चिपकाने पर एक समातंर चतुर्भुज, जिसका आधार (a+b) तथा ऊचाई h है, बनाते हैं

समातंर चतुर्भुज AD' A'D का क्षेत्रफल $= h(a+b)$

$\therefore$ समातंर ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left[(a+b)\times h\right]$

परिणामः एक समलंब का क्षेत्रफल बराबर है

$\frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) $\times$(उनके बीच की लांबिक दूरी)

क्रियाकलाप 25

टिप्पणी

शीर्षक: एक घन का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात करना

अपेक्षित पूर्वज्ञान:

(i) ठोस आकृतियों की पहचान का ज्ञान

(ii) एक घन की विशेषताएं

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात शिक्षार्थी इस योग्य हो जायेंगे कि वह घन के कुल पृष्ठ क्षेत्रफल का सूत्र बता सकें तथा जब आवश्यकता हो उसे ज्ञात कर सके

आवश्यक सामग्री:

(i) सफेद कागज़

(ii) पैंसिल तथा रबड़

(iii) ज्यामितिय उपकरण

(iv) स्कैच पैन

(v) पैमाना

(vi) फेविकोल

आकृति (i) आकृति (ii) आकृति (iii)

टिप्पणी

क्रियाकलाप के लिए तैयारी :

(i) दो आयत, जिनकी विमाएँ 8 सेमी. $\times$2 सेमी. तथा 6 सेमी. $\times$2 सेमी. है, ऐसी बनाएँ जो एक उभयनिष्ठ वर्ग ABCD से होकर जाती हैं।

(ii) वर्ग ABCD को आधार लेकर रेखाएँ खींचिए जो छः अलग–अलग वर्ग दिखाती है, जैसा आकृति (i) में दिखाया गया है

(iii) वर्ग ABCD को आधार लेकर, अन्य वर्गों को उनके किनारों (edges) के अनुदिश मोड़िए जैसा आकृति (ii) में दिखाया गया है

प्रदर्शन तथा प्रयोग :

अन्य वर्गों कों क्रीजों के अनुदिश मोड़कर एक घन बनाइए जैसा आकृति (iii) में दिखाया गया है। घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल, छः वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है, जो कि 6(भुजा)^2 हैं

परिणाम : एक घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल, 6(घन की भुजा)^2 के बराबर हैं

क्रियाकलाप 26

टिप्पणी

शीर्षक: वृत्त के त्रिज्यखंड के सूत्र का प्रयोग करके शंकु के वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करना

अपेक्षित पूर्वज्ञान:

(i) एक शंकु की संकल्पना का ज्ञान

(ii) वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

(iii) वृत्त के त्रिज्यखंड की चाप की लम्बाई

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप के करने के पश्चात शिक्षार्थी सक्षम हो जायेंगे कि शंकु के वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल का सूत्र बता सकें तथा जब आवश्यकता हो उसको ज्ञात कर सकें

आवश्यक सामग्री:

(i) मोटा सफेद शीट

(ii) लाल रंग का कागज़

(iii) स्कैच पैन

(iv) कैंची/कटर

(v) फेविकोल

आकृति (i) आकृति (ii)

क्रियाकलाप के लिए तैयारी :

(i) मोटे लाल कागज़ का बना शंकु लीजिए जिसकी तिरछी ऊँचाई l तथा त्रिज्या r हैं

(ii) शंकु की वक्र पृष्ठ को उसकी तिरछी ऊँचाई के अनुदिश कटर से कटिए

(iii) कटे हुये शंकु के वक्र पृष्ठ को, जो वृत्त के त्रिज्यखंड के रूप का है, जिसकी त्रिज्या l है, को एक सफेद शीट पर चिपकाइए [आकृति *(ii)* देखिए]

प्रदर्शन तथा प्रयोगः

माना उस वृत्त का, जिसका त्रिज्य खंड एक भाग है, केन्द्रीय कोण θ है। यह देख सकते हैं कि शंकु के आधार की परिधि त्रिज्यखंड की लम्बाई बनती है

$$\therefore \qquad 2\pi r = 2\pi l.\frac{\theta}{360} \Rightarrow \theta = 360^0.\frac{r}{l}$$

त्रिज्य खंड का क्षेत्रफल = शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

त्रिज्य खंड का क्षेत्रफल = $\pi l^2.\frac{\theta}{360^0} = \left(\frac{\pi l^2}{360^0}\right)\left(360^0\frac{r}{l}\right) = \pi rl$

$\therefore$ शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi rl$

निष्कर्षः शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi$ (आधार की त्रिज्या)$\times$(शंकु की तिरछी ऊचाँई)

क्रियाकलाप 27

शीर्षक: एक ही त्रिज्या तथा एक ही ऊँचाई वाले एक लम्ब वृत्तीय शंकु, लम्ब वृत्तीय बेलन तथा अर्धगोले के आयतनों में सबंध ज्ञात करना

अपेक्षित पूर्वज्ञान: ठोसो का ज्ञान – शंकु, बेलन तथा अर्धगोला

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप के करने के पश्चात शिक्षार्थी सक्षम हो जायेंगे कि शंकु के वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल का सूत्र बता सकें तथा जब आवश्यकता हो उसको ज्ञात कर सकें

आवश्यक सामग्री:

(i) प्लास्टिक शीट

(ii) प्लास्टिक गेंद

(iii) फेविकोल

(iv) स्कैच पैन

(v) रेत

क्रियाकलाप के लिए तैयारी :

(i) 10 सेमी. त्रिज्या का एक प्लास्टिक गेंद लेकर उसके दो समान भाग करें, ताकि एक अर्धगोला *(a)* मिले।

(ii) प्लास्टिक शीट से 10 सेमी आधार की त्रिज्या तथा 10 सेमी ऊचाँई वाला एक लम्ब वृत्तीय शंकु बनाइए

(iii) इसी प्रकार प्लास्टिक शीट से 10 सेमी आधार की त्रिज्या तथा 10 सेमी ऊँचाई वाला एक लम्ब वृत्तीय बेलन बनाइए।

टिप्पणी

प्रदर्शन तथा प्रयोग:

(i) शंकु को रेत से भर कर दो बार अर्धगोले के खांचे (शैल) में डालिए। आप देंखेगें कि खांचा ऊपर तक रेत से भर गया है

(ii) शंकु को 3 बार रेत से भर बेलन मे डालें। आप फिर देखेंगे कि बेलन ऊपर तक रेत से भर गया है।

(iii) शंकु का आयतन $=\frac{1}{3}\pi r^2.h=\frac{1}{3}\pi r^2.r\,(\because h=r)=\frac{1}{3}\pi r^3.$

अर्धगोले का आयतन $=\frac{1}{3}\pi r^3\times 2=\frac{2}{3}\pi r^3.$

बेलन का आयतन $=\frac{1}{3}\pi r^3\times 3=\pi r^3$

अतः अपेक्षित अनुपात $=\frac{1}{3}\pi r^3:\pi r^3:\frac{2}{3}\pi r^3=1:3:2$

टिप्पणी

क्रियाकलाप 28

शीर्षक: सर्वसमिका $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ को सत्यापित करना

अपेक्षित पूर्वज्ञान: एक घन तथा घनाम का आयतन

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप के करने के पश्चात शिक्षार्थी सक्षम हो जायेंगे कि वह इस सर्वसमिका को सत्यापित कर सकें तथा जहाँ चाहिए इसका प्रयोग कर सकें

आवश्यक सामग्री:

(i) एक्रिलिक शीट

(ii) लकड़ी का बोर्ड

(iii) स्कैच पैन

(iv) गलेज्ड (चमकीला) कागज़

(v) कैंची

(vi) गोंद / फेविकोल

आकृति 1(a)

आकृति 1(b)

आकृति 1(c)

आकृति 1(d)

आकृति 1(e)

आकृति 1(f)

टिप्पणी

क्रियाकलाप के लिए तैयारी :

(i) लकड़ी के बोर्ड का प्रयोग करके $(a-b)\times a\times a$ घन इकाई का एक घनाभ बनाँए [यहाँ माना a=3 इकाई, b=1 इकाई] देखिए आकृति 1(a)

(ii) उसी लकड़ी के बोर्ड के प्रयोग से $(a-b)\times a\times b[2\times3\times1]$ घन इकाई के साइज का एक घनाभ बनाएँ जैसा आकृति 1(b) मे दिखाया गया है

(iii) उसी लकड़ी के बोर्ड के प्रयोग से एक अन्य घनाभ, $(a-b)\times b\times b[2\times1\times1]$ घन इकाई का बनाइए जैसा आकृति 1(c) में दिखाया है।

(iv) उसी लकड़ी के बोंड के प्रयोग से $b\times b\times b[1\times1\times1]$ घन इकाई के आकार के साइज का घन बनाइए जैसा आकृति 1(d) में दिखाया गया है।

(v) एक्रिलिक शीट से $a\times a\times a[3\times3\times3]$ घन इकाई के साइज का एक घन बनाइए जैसा आकृति 1(e) में दिखाया गया है।

प्रदर्शन तथा प्रयोगः

इन तीनों घनाभों को इस प्रकार जोड़कर सजाईए कि $3\times3\times3$ घन इकाई का घन बने। घनों तथा घनाभों की उपयुक्त व्यवस्था से सर्वामिका $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ को निम्न प्रकार से सत्यापित किया जा सकता है:

$$a^3=(a-b)\times a\times a+(a-b)\times a\times b+(a-b)\times b\times b+b\times b\times b$$

$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+b^3$$

$$\Rightarrow \quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

अतः इस माडल क्रियाकलाप का प्रयोग कर इस सर्वसमिका को सत्यापित किया जा सकता है

निष्कर्षः $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

क्रियाकलाप 29

टिप्पणी

शीर्षक: एक समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल वाली त्रिभुज बनाना

अपेक्षित पूर्वज्ञान:
(i) क्षेत्रफल की संकल्पना
(ii) समातंर चतुर्भुज तथा त्रिभुज
(iii) समांतर चतुर्भुज तथा त्रिभुज से संबधित क्षेत्रफल

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप के बाद आप सक्षम हो जायेंगे कि आप एक समातंर चतुर्भुज के क्षेत्रफल वाली विभिन्न त्रिभुजें बना सकें

आवश्यक सामग्री:

(i) सफेद तथा रगंदार कागज़
(ii) पैंसिल, रबड़
(iii) ज्यामितीय उपकरण
(iv) स्कैच पैन
(v) फेविकोल
(vi) सफेद चार्ट पेपर

टिप्पणी

क्रियाकलाप के लिए तैयारी :

(i) 15 सेमी. $\times$10सेमी साइज़ का एक चार्ट पेपर लीजिए

(ii) सफेद कागज़ पर एक समातंर चतुर्भुज ABCD बनाइए जिसमें AB=4सेमी, BC=3सेमी तथा $\angle ADC = 75^0$ हैं

(iii) समातंर चतुर्भुज को इस प्रकार मोड़े कि CD, AD पर गिरे तथा उसे अच्छी प्रकार से दबा कर क्रीज BD बनाइए। BD अनुदिश एक रेखा खींचिए

(iv) समातंर चतुर्भुज ABCD को सफेद चार्ट पेपर के टुकड़े पर फेविकोल से चिपकाइए

(v) A से BD के समातंर रेखा AE खींचिए जो बढ़ाई गई CB को E पर मिले। DE को मिलाइए

प्रदर्शन तथा प्रयोग :

1. Δ BEF तथा Δ ADF को क्रमशः नीले तथा जामुनी रंगों से भरिए

2. ΔADF की एक प्रतिलिपी बनाकर Δ BEF पर इस प्रकार रखिए कि AD, BE के अनुदिश गिरे तथा AF, BF के अनुदिश

3. आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूरा ढक लेती हैं, इसलिए वह क्षेत्रफल में समान हैं।

4. क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज ABCD) = क्षेत्रफल (Quad DCBF) + क्षेत्रफल (Δ DAF)

= क्षेत्रफल (Quad. DCBF)+ क्षेत्रफल (Δ FBE)

= क्षेत्रफल (Δ DCE)

$\therefore$ समांतर चतुर्भुज ABCD तथा Δ DCE क्षेत्रफल में समान हैं

क्रियाकलाप 30

शीर्षक: विभिन्न त्रिभुजों के अन्तःकेन्द्र (incentre) ज्ञात करना

अपेक्षित पूर्वज्ञान: (i) विभिन्न प्रकार की त्रिभुजें

(ii) एक त्रिभुज की संगामी रेखाएँ

उद्देश्य: इस क्रियाकलाप के बाद आप सक्षम हो जायेंगे कि आप किसी भी त्रिभुज का अन्तः केन्द्र ज्ञात कर सकें

आवश्यक सामग्री:

(i) सफेद कागज़

(ii) कटर

(iii) स्कैच पैन

(iv) पैंसिल, स्केल तथा रबड़

क्रियाकलाप के लिए तैयारी :

(i) तीन कागज़, जिनमें से प्रत्येक 8 सेमी. $\times 10$ सेमी साइज़ का है, लीजिए। उनमें से एक पर विषमबाहु त्रिभुज, दूसरे पर समकोण त्रिभुज तथा तीसरे पर अधिक कोण त्रिभुज बनाइए।

(ii) प्रत्येक कागज़ में से कटर द्वारा त्रिभुजाकार क्षेत्र काट लीजिए

(iii) इन त्रिभुजों के कोणों के, कोण समद्विभाजक कागज़ मोड़ने की क्रिया द्वारा, क्रीज बनाकर बनाइए

प्रदर्शन तथा प्रयोग :

आप देखेंगे कि क्रीजें (जो कोण समद्विभाजक दर्शाती हैं), संगामी हैं यह बिन्दु त्रिभुज का अन्तः केन्द्र कहलाता है।